Широков Н. А.[1]

Полиномиальные приближения в среднем на отрезках

Результаты о полиномиальном приближении в среднем на отрезках стали появляться в 1970-х годах [1], [2]. В работе [3] была установлена возможность приближения с среднем одной последовательностью полиномов на нескольких дизъюнктных отрезках сразу. Приведем этот результат. Пусть $s_k = [a_k, b_k]$ — попарно дизъюнктные отрезки, $1 \le k \le m$, $m \ge$ ≥ 1, числа p_k, $1 < p_k < \infty$ произвольны, $\rho_{\frac{1}{n},k}(z) = \frac{1}{n}(\frac{1}{n}+\sqrt{|z-a_k||z-b_k|})$, $z \in s_k$. Пусть $\Theta_k = \arg(b_k - a_k)$. Для функции $f_k\colon s_k \to \mathbb{C}$ для $z \in s_k$ положим $f_k'(z) = \lim_{\delta\to 0} \frac{f_k(z+\delta e^{i\Theta_k})-f_k(z)}{\delta_k e^{i\Theta_k}}$. Справедливо следующее утверждение [3].

Теорема А. Пусть $f_k \in C(s_k)$, $1 \le k \le m$ и $f_k' \in L^{p_k}(s_k)$. Тогда для любого $n = 1, 2, \ldots$ существуют полиномы $P_n(z)$, $\deg P_n \le n$ и существует постоянная c_0, не зависящая от n, такие, что выполняется соотношение

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{s_k} \left| \frac{f_k(z) - P_n(z)}{\rho_{\frac{1}{n},k}(z)} \right|^{p_k} |dz| \le c_0. \tag{1}$$

Оказывается, что соотношение (1) может быть усилено. Определим веса $\lambda_{nk}(z)$ следующим образом:

$$\lambda_{nk}(z) = 1 + \frac{1}{n\sqrt{|z-a_k||z-b_k|}}, \qquad z \in s_k.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Предположим, что отрезок s_k и функции f_k удовлетворяют условиям теоремы А. Тогда для любого $n = 1, 2, \ldots$ существуют полиномы $P_n(z)$, $\deg P_n \le n$, и существует постоянная c_1, не зависящая от n, такие, что выполняется оценка

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{s_k} \left| \frac{f_k(z) - P_n(z)}{\rho_{\frac{1}{n},k}(z)} \right|^{p_k} \lambda_{nk}(z)\, |dz| \le c_1.$$

[1]Широков Николай Алексеевич, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет

Отдельно выделим случай $m = 1$ с $s_1 = [-1, 1]$.

Теорема 2. Пусть $f \in C([-1,1])$, $1 < p < \infty$, $f' \in L^p([-1,1])$. Тогда для любого $n = 1, 2, \ldots$ существуют полиномы P_n, $\deg P_n \le n$ и постоянная C_p такие, что справедливо соотношение

$$\int\limits_{-1}^{1} \left| \frac{f(x) - P_n(x)}{\frac{1}{n}(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2})} \right|^p \left(1 + \frac{1}{n\sqrt{1-x^2}} \right) dx \le C_p \|f'\|_p^p.$$

Излагаемый материал опубликован в журнале “Алгебра и анализ”, том 36, № 5, стр. 163–172, 2024 год.

Список литературы

[1] Моторный В. П. Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике L^p // Известия АН СССР. Серия математическая. 1971. Т. 35 (4). С. 874–899.

[2] Потапов М. К. О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения // Труды МИАН. 1975. № 134. С. 260–277.

[3] Крашенинникова Ю. В., Широков Н. А. Аппроксимация полиномами в метрике L^p на дизъюнктных отрезках // Записки научных семинаров ПОМИ. 2000. № 270. С. 175–200.